

EL ÁREA DE MATEMÁTICAS Y CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS SEGÚN EL ESTUDIO PISA

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE CONOCIMIENTO

El área de matemáticas se ocupa de la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de un modo efectivo, al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones. La evaluación OCDE/PISA se centra en problemas del mundo real, de modo que va más allá de los casos y problemas que se plantean generalmente en las aulas. En el contexto del mundo real, a la hora de comprar, viajar, cocinar, gestionar su economía doméstica o valorar cuestiones políticas entre otras cosas, los ciudadanos se enfrentan con frecuencia a situaciones en las que el utilizar un razonamiento cuantitativo o espacial u otras aptitudes matemáticas les ayuda a aclarar, formular o resolver un problema. Este tipo de utilización de las matemáticas se basa en las destrezas que se han adquirido y practicado a través de los problemas que se presentan generalmente en los libros de texto y en las clases. Sin embargo, estas destrezas requieren la capacidad de saber aplicarlas en un contexto menos estructurado donde no hay indicaciones tan claras y donde el estudiante debe decidir qué datos son los importantes y cómo aplicarlos para que resulten útiles.

La competencia matemática de acuerdo al proyecto OCDE/PISA se ocupa de establecer en qué grado los estudiantes de 15 años pueden considerarse ciudadanos informados y reflexivos y consumidores inteligentes. Los ciudadanos de todos los países se tienen que enfrentar cada vez más con una miríada de tareas que comprenden conceptos matemáticos, cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo. Sin ir más lejos, los medios de comunicación (periódicos, revistas, televisión e Internet) están plagados de información en forma de tablas, diagramas y gráficos sobre cuestiones como el tiempo, la economía, la medicina y el deporte, por nombrar sólo unas pocas. Los ciudadanos se ven bombardeados con información sobre temas como *el calentamiento global y el efecto invernadero, el crecimiento de la población, las mareas negras y la contaminación de los mares, la desaparición del campo*. Y, por último, pero no por ello menos importante, los ciudadanos hacen frente a la necesidad de leer formularios, interpretar horarios de autobuses y trenes, realizar correctamente operaciones bancarias, decidir cuál es la mejor compra en el mercado, etcétera. La competencia matemática del proyecto OCDE/PISA se centra en la capacidad de los

estudiantes de 15 años (la edad en que muchos están terminando su aprendizaje formal obligatorio de matemáticas) para utilizar su conocimiento y comprensión matemáticos para dilucidar estas cuestiones y llevar a cabo las acciones pertinentes. Dentro del proyecto OCDE/PISA la definición de *competencia matemática* es la siguiente:

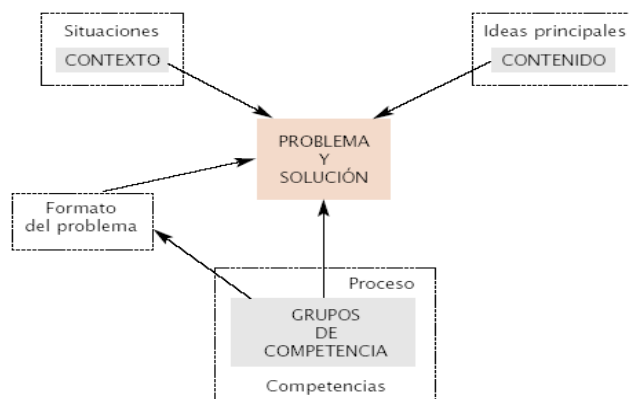
La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

ORGANIZACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

El marco conceptual de matemáticas del proyecto OCDE/PISA proporciona la base y la descripción de una evaluación que determine en qué medida los estudiantes de 15 años son capaces de manejar las matemáticas de una manera bien fundada al hacer frente a problemas del mundo real. O, en términos más generales, una evaluación del grado de competencia matemática de los estudiantes de 15 años. Para describir más claramente el área de conocimiento y los problemas evaluados deben distinguirse tres elementos:

- las **situaciones o contextos** en que se sitúan los problemas;
- el **contenido matemático** del que hay que valerse para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales; y, sobre todo,
- las **competencias** que deben activarse para vincular el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas, y, por tanto, para resolver los problemas.

Estos elementos están representados de manera gráfica en el Cuadro 1.2. A continuación aparece una explicación de cada uno de ellos.



Los elementos del área de conocimiento de matemáticas

❖ SITUACIONES O CONTEXTOS

Un aspecto importante de la competencia matemática lo constituye el involucrarse en las matemáticas, es decir, ejercitar y utilizar las matemáticas en una amplia variedad de situaciones. Se ha reconocido, en efecto, que al resolver un individuo asuntos susceptibles de tratamiento matemático, las representaciones y los métodos que escoge a menudo dependen de las situaciones en las que se presentan los problemas. La situación es la parte del mundo del estudiante en la que se localizan los ejercicios que se le plantean. Se sitúa a una distancia diversa del estudiante mismo. Dentro de la evaluación OCDE/PISA, la situación más cercana es la vida personal del estudiante. Luego se sitúan la vida escolar, la vida laboral y el ocio, seguidas de la vida en la comunidad local y la sociedad tal y como se presentan en la vida diaria. A mucha distancia de todas ellas están las situaciones de tipo científico. Para los problemas que se van a presentar, se definen y utilizan cuatro tipos de situaciones: *personal, educacional/profesional, pública y científica*.

- Las situaciones personales están relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema.
- Las situaciones educativas o laborales las encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen al alumno una tarea que le impone una actividad matemática para encontrar su respuesta.
- Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública.
- Finalmente, las situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

El contexto de un ejercicio lo constituye el modo concreto en que ésta se presenta dentro de una situación. Engloba los elementos específicos utilizados en el enunciado del problema que el ejercicio plantea.

❖ **CONTENIDO MATEMÁTICO**

Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. En las escuelas, el currículum de matemáticas se ha organizado de una manera lógica alrededor de las diferentes líneas de contenido (p. ej., aritmética, álgebra, geometría) y sus temas subordinados, que reflejan las ramas históricamente establecidas del pensamiento matemático y que facilitan el desarrollo de un plan de estudios estructurado. No obstante, en el mundo real, los fenómenos susceptibles de un tratamiento matemático no aparecen organizados de un modo tan lógico. Por lo general, los problemas no aparecen en contextos y maneras que permitan su comprensión y solución a través de la aplicación del conocimiento de una única área. El problema del tablero de feria descrito en el Ejemplo 2 constituye un ejemplo de problema que recurre a diversas áreas matemáticas.

Dado que el objetivo del proyecto OCDE/PISA es evaluar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas reales, la estrategia ha consistido en definir el ámbito de los contenidos que se iban a evaluar utilizando un enfoque fenomenológico para describir los conceptos, estructuras e ideas matemáticas. Ello significa describir los contenidos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas para los que se han creado. Este enfoque garantiza una atención de la evaluación que concuerda con la definición del área de conocimiento y que abarca un ámbito de contenidos que incluye todo aquello que normalmente aparece en otras evaluaciones matemáticas y en los currículos de matemáticas de los diferentes países.

En el proyecto OCDE/PISA 2003 se utiliza la siguiente lista de ideas principales para adaptarse a los requisitos del desarrollo histórico, la cobertura del área y la plasmación de las líneas principales del currículum escolar: *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e, incertidumbre*.

- *Cantidad*: Esta idea principal se centra en la necesidad de cuantificar para organizar el mundo. Las características importantes engloban la comprensión del tamaño relativo, el reconocimiento de las regularidades numéricas y la utilización de los números para representar cantidades y atributos

cuantificables de los objetos del mundo real (recuentos y medidas). Además, la *cantidad* tiene que ver con el procesamiento y comprensión de los números que de diferentes maneras se nos presentan.

- Espacio y forma: Las regularidades geométricas se encuentran en todas partes: casas, edificios de oficinas, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, callejeros, hojas de trébol, cristales y sombras. El estudio de la forma y las construcciones exige buscar similitudes y diferencias al analizar los componentes formales y al reconocer las formas en diferentes representaciones y diferentes dimensiones. El estudio de las formas está estrechamente vinculado al concepto de *percepción espacial*. Esto comporta aprender a reconocer, explorar y conquistar, para vivir, respirar y movernos con mayor conocimiento en el espacio en que vivimos (Freudenthal, 1973). Para conseguirlo es preciso comprender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y de por qué las vemos de ese modo. Debemos aprender a orientarnos por el espacio y a través de las construcciones y formas.
- Cambio y relaciones: Cualquier fenómeno natural constituye una manifestación de cambio; el mundo que nos rodea presenta una gran cantidad de relaciones temporales y permanentes entre los diferentes fenómenos. Algunos de estos procesos de cambio comportan funciones matemáticas simples y pueden describirse o modelarse mediante ellas. No obstante, muchas relaciones pertenecen a categorías diferentes y, a menudo, el análisis de los datos resulta esencial para determinar qué tipo de relación se produce. A menudo las relaciones matemáticas adoptan la forma de ecuaciones o desigualdades, pero también pueden darse relaciones de una naturaleza más general (p. ej., equivalencia, divisibilidad o inclusión, entre otras). La traducción entre las diferentes representaciones tiene a menudo una importancia fundamental a la hora de ocuparse de diversas situaciones y tareas.
- Incertidumbre: La actual “sociedad de la información” proporciona un gran número de informaciones que a menudo se presentan como precisas, científicas y en diverso grado ciertas. No obstante, en la vida diaria nos enfrentamos a resultados de elecciones inciertos, puentes que desmoronan, caídas de la bolsa, predicciones del tiempo poco fidedignas, predicciones desafortunadas del crecimiento de la población, modelos económicos que no funcionan bien y muchas otras demostraciones de la incertidumbre del mundo en que vivimos. La *incertidumbre* está pensada para sugerir dos temas

relacionados: los datos y el azar. Estos dos fenómenos son objeto de estudio matemático por parte de la estadística y de la probabilidad, respectivamente.

El conjunto de las cuatro áreas de contenido contribuye a vincular los ítems con los campos tradicionales del currículo de matemáticas y abarca la diversidad de necesidades matemáticas de los alumnos de 15 años en su preparación como ciudadanos.

❖ LAS COMPETENCIAS

Un individuo que deba participar con éxito en la matematización en una gran variedad de situaciones, contextos intra y extra-matemáticos e ideas principales necesita poseer un número suficiente de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva. Cada una de estas competencias puede dominarse a diferentes niveles. Las distintas partes de la matematización se sirven de manera diferente de estas competencias, tanto en lo que se refiere a las competencias individuales como en relación con el nivel de dominio necesario. Para identificar y examinar estas competencias, el proyecto PISA ha decidido utilizar ocho competencias matemáticas características o procesos que se basan en su forma actual en el trabajo de Niss (1999) tal como ya se ha apuntado anteriormente en el apartado de competencia matemática:

1. Pensar y razonar: Formular preguntas características de las matemáticas («Hay...?», «En ese caso, ¿cuántos?», «Cómo puedo hallar...»); conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas; diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas); y entender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados.
2. Argumentar: Saber lo que son las demostraciones matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar el encadenamiento de argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede pasar y por qué?»); y crear y plasmar argumentos matemáticos.
3. Comunicar: Esto comporta saber expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático y entender las afirmaciones orales y escritas de terceras personas sobre dichos temas.

4. Modelar: Estructurar el campo o situación que se quiere modelar; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar los modelos matemáticos en términos de “realidad”; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.

5. Plantear y resolver problemas: Representar, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, “puro”, “aplicado”, “abierto” y “cerrado”); y la resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras.

6. Representar: Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.

7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico y comprender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/ formal; manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y formulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

8. Emplear soportes y herramientas: Tener conocimientos y ser capaz de utilizar diferentes soportes y herramientas (entre ellas, herramientas de las tecnologías de la información) que pueden ayudar en la actividad matemática; y conocer sus limitaciones.

Conviene observar que las cuatro primeras tienen que ver con la habilidad de preguntar y contestar las preguntas en y con las matemáticas, en cambio, las cuatro últimas tienen relación con la destreza o habilidad en el manejo del lenguaje matemático y de las herramientas matemáticas.

La intención del proyecto PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán

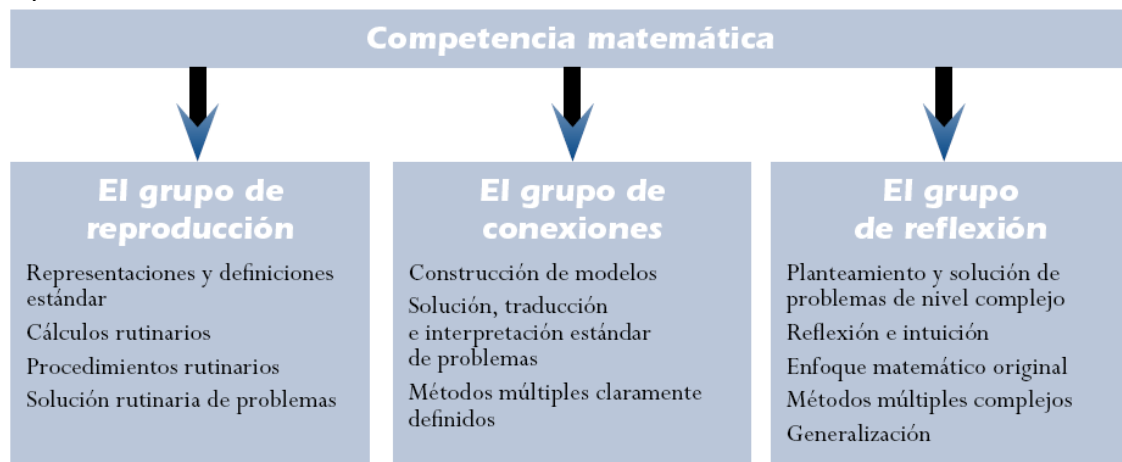
considerablemente de una persona a otra. Esto es en parte así debido a que todo el aprendizaje tiene lugar a través de experiencias, y «la elaboración del conocimiento propio tiene lugar a través de los procesos de interacción, negociación y colaboración» (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996, pág. 510, citado en PISA 2003).

Por esta razón, consideran oportuno definir una serie de grupos de capacidades basados en el tipo de exigencias cognitivas que se requieren para resolver los distintos tipos de problemas matemáticos: grupo de reproducción, grupo de conexiones y el grupo de reflexión. En cada grupo se tratan distintas formas de interpretar cada una de las ocho capacidades descritas anteriormente. A continuación se explican las características básicas de estos tres grupos de capacidades:

- El grupo de reproducción: Las capacidades de este grupo comportan básicamente la reproducción de conocimientos que ya han sido practicados. Incluyen, por lo tanto, los tipos de conocimiento que suelen practicarse en las evaluaciones estándar y en las pruebas escolares. Entre estas capacidades se cuentan el conocimiento de los hechos y de las representaciones de problemas más comunes, la identificación de equivalentes, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas conocidas, la utilización de procesos rutinarios, la aplicación de algoritmos y habilidades técnicas estándar, el manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas conocidas o estandarizadas y la realización de operaciones sencillas.
- El grupo de conexiones: Las capacidades del grupo de *conexiones* se cimentan sobre la base que proporcionan las capacidades del grupo de *reproducción*, pero abordan ya problemas cuyas situaciones no son rutinarias, aunque sigan presentándose en unos marcos familiares o casi familiares. Normalmente, los ejercicios de evaluación de este grupo requieren que se dé algún tipo de prueba de que se ha realizado una integración y conexión del material perteneciente a las diferentes ideas clave o a las diversas líneas curriculares, o que se han vinculado diferentes modos de representar un problema. Los ejercicios de evaluación que miden el grupo de conexiones pueden definirse mediante los siguientes descriptores clave: integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
- El grupo de reflexión: Las capacidades de este grupo requieren que el alumno aporte un elemento de reflexión sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la solución de un problema. Así pues, se relacionan con la capacidad que tienen los estudiantes de plantear estrategias de solución y

aplicarlas a unos marcos de problema que contienen más elementos y pueden resultar más «originales» (es decir, menos familiares) que los que se dan en el grupo de *conexiones*. Los ejercicios de evaluación que sirven para medir las capacidades del grupo de reflexión pueden definirse mediante los siguientes descriptores clave: nivel avanzado de razonamiento, argumentación, abstracciones, generalizaciones y construcción de modelos para su aplicación a contextos nuevos.

La figura siguiente resume las diferencias que existen entre los grupos de capacidades:



Representación gráfica de los grupos de capacidades (PISA 2006, pp. 112)

Además de las tres variables de tarea mencionadas, en los instrumentos de evaluación de PISA se trabajó con cinco tipos de ejercicios, según el formato de la respuesta:

- Ejercicios de respuesta construida abierta.
- Ejercicios de respuesta construida cerrada.
- Ejercicios de respuesta breve.
- Ejercicios de elección múltiple compleja.
- Ejercicios de elección múltiple.

Todos los ejercicios de las pruebas PISA vienen clasificados según las tres variables anteriores y el formato de respuesta.